Segunda Edición

ANALISIS ESTADISTICO

YA-LUN CHOU

St. John's University

Traducido al español por
VICENTE AGUT ARMER



Interamericana

éxico – Argentina – España – Brasil – Colombia – Chile – Ecuador – Perú – Puerto Rico – Uruguay – Venezuela

Capítulo 19

NUMEROS INDICES

19.1 INTRODUCCION

Uno de los problemas más importantes del estudio de la economía y la administración de empresas es cómo medir la cantidad de cierto agregado heterogéneo. El agregado puede ser uno de cantidad física, tal como acciones en el balance general o corrientes en el estado de pérdidas y ganancias. El agregado también puede ser una lista de precios, tal como precios pagados por la compra de distintos tipos de insumos por una empresa o precios recibidos por una tienda de departamentos por sus ventas. En cada caso, el problema de medición es obtener una sola cifra que sea descriptiva del volumen de un agregado dado, o del cambio en él, con el tiempo o de un lugar a otro. Los instrumentos estadísticos para tal medición se llaman números índices. En realidad, los *números índices* relacionan una o varias variables de un periodo dado con la misma variable o variables en otro periodo, llamado *periodo base*. Un índice, nombre simplificado de números índices, que se calcula partiendo de una sola variable, se llama un *índice univariable*, mientras que un índice que es construido de un grupo de variables se considera como un *índice compuesto*. Como se verá inmediatamente, un índice univariable puede ser construido fácilmente y su significado es fácilmente evidente, pero surgen graves problemas cuando tratamos de combinar muchas variables en cierta forma significativa para presentar un índice compuesto.

Aunque la tarea principal de este capítulo es presentar las técnicas y los problemas de construir índices compuestos, primero daremos una ilustración de un índice univariable para exponer la naturaleza básica y la función de los números índices. Consideremos los datos de producción hipotéticos del cuadro 19.1. El índice A es calculado escogiendo 1966 como periodo base. Estos números índices se hallan dividiendo la producción de cada año por la producción de 1966 y multiplicando por 100. Así, los números índices están en forma de porcentajes. El número índice para cada año es interpretado en términos del periodo base. Por ejemplo, el número índice para 1970 significa que la producción de 1970 fue 133 por 100 de la producción de 1966. El índice B se calcula usando la producción media de 1960 y 1961 (es decir, 10.5 mil libras) como base. La producción de cada año se divide por esta base y el resultado se multiplica por 100 para formar el índice B. Sin duda, la principal función de un número índice univariable es transformar las cantidades absolutas de

Cuadro 19.1. Ilustración de un índice simple de producción

Año	Producción (miles de libras)	Indice A (1966 = 100)	Indice B (1960 – 1961 = 100)
1960	8.5	63	81
1961	12.5	93	119
1962	9.4	70	90
1963	10.7	79	102
1964	13.6	101	130
1965	15.3	113	146
1966	13.5	100	129
1967	12.8	95	122
1968	14.7	109	140
1969	16.7	124	159
1970	18.0	133	171

una variable en números relativos, para que pueda hacerse fácilmente una comparación de los cambios en la variable con el tiempo.

Los índices compuestos son de muchos tipos y pueden ser construidos de muchas formas. Nos será imposible abarcar toda la variedad de índices en un solo capítulo. Por ello, limitaremos nuestro estudio a algunos de los índices usados más frecuentemente en economía y administración de empresas. Estos índices, en el orden de su estudio aquí, se clasifican como sigue:

1. Indices agregados simples
   a) Indice simple agregado de precios
   b) Indice simple agregado de cantidades
2. Indices simples promedios de relativos
   a) Indice simple promedio relativo de precios
   b) Indice simple promedio relativo de cantidades
3. Indices ponderados agregados
   a) Indice ponderado agregado de precios
   b) Indice ponderado agregado de cantidades
4. Indices ponderados promedios de relativos
   a) Indice ponderado promedio relativo de precios
   b) Indice ponderado promedio relativo de cantidades.
5. Indices especiales
   a) Indice de valor
   b) Indice de productividad

Para evitar la repetición, definiremos aquí los símbolos básicos usados en nuestro estudio de los índices:

p = precio de un solo bien,
q = cantidad de un solo bien,
p_0 = precio de un bien en el periodo base,
q_0 = cantidad de un bien en el periodo base,
p_n = precio de un bien en un periodo dado, donde n designa periodos $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,$
q_n = cantidad de un bien en un periodo dado,
i = un bien particular, como en p_{0i} para el i-ésimo bien en el periodo base,

Cuadro 19.2. **Precio y datos de producción ilustrativos, 1972-1974**

		Precio por unidad			Cantidad		
Bien	*Unidad*	*1972*	*1973*	*1974*	*1972*	*1973*	*1974*
A	Onza	$1.00	$1.25	$1.50	10 000	12 500	13 000
B	Tonelada	10.00	11.75	13.50	1 000	1 100	1 250
C	Libra	4.00	5.00	4.50	500	500	400

k = número de bienes incluidos en el número índice,
P = un índice de precios,
Q = un índice de cantidades,
P_b = un índice de precios derivado usando cantidades de periodo base como pesos,
P_n = un índice de precios derivado usando cantidades del periodo dado como pesos,
Q_b = un índice de cantidades derivado usando precios del periodo base como pesos,
Q_n = un índice de cantidades derivado usando precios del periodo dado como pesos,
V = un índice de valores,
E = un índice de productividades.

Para simplificar nuestras ilustraciones numéricas, usaremos los datos hipotéticos del cuadro 19.2. Suponemos que una empresa industrial, establecida en 1972, produce tres tipos de productos, A, B y C. Se define el precio como el precio de venta medio anual, y la producción es la producción total anual en miles. La empresa desea medir los cambios en sus precios de venta y en el volumen físico de producción en conjunto de un año a otro.

19.2 INDICES AGREGADOS SIMPLES

El cálculo de un índice de precios por el método agregado simple es muy sencillo. Primero sumamos los distintos precios de cada unidad de tiempo para obtener $\sum p_n$ para cada valor de n. Luego, el total de cada periodo dado se divide por el total del periodo base. Estos cálculos se hacen en el cuadro 19.3. La fórmula general es

Cuadro 19.3. **Cálculo de un índice simple agregado de precios**
(1972 = 100)

Bien	1972 p_0	1973 p_1	1974 p_2
A	$ 1.00	$ 1.25	$ 1.50
B	10.00	11.75	13.50
C	4.00	5.00	4.50
Total	$15.00	$18.00	$19.50
Número índice	1.00	1.20	1.30
o	100	120	130

$$P = \frac{\sum p_n}{\sum p_0}. \tag{19.1}$$

Estos resultados se expresan generalmente en forma de porcentaje.

De la ecuación (19.1) vemos que el índice simple de precios agregado trata, en nuestro ejemplo, de averiguar los ingresos totales por ventas de cada año en el supuesto de vender una unidad de cada diez y expresa este total como un porcentaje del ingreso del año base. Como tal, el agregado simple asigna igual importancia al cambio absoluto de cada precio. En esto reside el principal defecto de este método, porque permite que un bien con un precio alto domine el índice. Tal como se encuentran ahora nuestros datos ilustrativos, el precio de B ejerce mucha más influencia que el precio de C, el cual, a su vez, domina el precio de A en los números índices. Estas influencias, como puede verse fácilmente, serían invertidas si todos los precios fueran cotizados en las mismas unidades, por ejemplo onzas. Así, la unidad en que es cotizado cada precio se introduce en el agregado simple de precios como un peso oculto que a menudo carece de importancia económica. Este peso ilógicamente oculto limita la utilidad práctica del índice simple agregado de precios.

La fórmula para el índice simple agregado de cantidades es

$$Q = \frac{\sum q_n}{\sum q_0}. \tag{19.2}$$

Esta fórmula, evidentemente, no puede ser usada para un agregado en el que los bienes se expresan en diferentes unidades, porque carecería de sentido cuando sumamos toneladas, libras y onzas. Si usamos esta fórmula para formar un índice para un grupo de, por ejemplo, bienes de consumo cotizados en las mismas unidades, compararíamos las cantidades de un año dado con las cantidades del año base para adquirir los bienes realmente comprados en cada año como si el precio de cada bien fuera cada año $1 por unidad. Este es un supuesto carente de realismo. En consecuencia, esta fórmula raras veces se emplea para medir los cambios en la cantidad.

19.3 INDICES SIMPLES PROMEDIOS DE RELATIVOS

Como lo indica el nombre de este tipo de índice, consiste en promediar los relativos de precios o cantidades. Para calcular un índice simple promedio de precios relativos, como se ilustra en el cuadro 19.4, seguimos estos pasos: 1) Obtenemos el relativo de precio dividiendo el precio del bien i-ésimo en un periodo dado, p_{ni}, por su precio del periodo base, p_{0i}. 2) Obtenemos las sumas de los relativos de los años y dividimos cada una por el número de bienes en conjunto. El promedio simple de relativos es, en realidad, una media aritmética de relativos. Este método se resume por la fórmula siguiente:

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{p_{ni}}{p_{0i}}\right)}{k} \tag{19.3}$$

Cuadro 19.4. Cálculo de un índice simple promedio de relativos de precios
(1972 = 100)

Bien i	1972 $\frac{p_{0i}}{p_{0i}}$	1973 $\frac{p_{1i}}{p_{0i}}$	1974 $\frac{p_{2i}}{p_{0i}}$
A	$1.00	$1.250	$1.500
B	1.00	1.175	1.350
C	1.00	1.250	1.125
Total	$3.00	$3.675	$3.975
Número índice	100	122.5	132.5

Por ejemplo,

$$P_{1973} = \frac{3.675}{3} = 1.225 \text{ ó } 122.5 \text{ por } 100.$$

El procedimiento para calcular un índice simple de promedio de relativos de cantidades es el mismo que para el correspondiente índice de precios. Esto se ilustra por el cuadro 19.5. La ecuación de índice de cantidades análogas es

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{q_{ni}}{q_{0i}}\right)}{k}. \tag{19.4}$$

De los resultados obtenidos en los cuadros 19.4 y 19.5 por el método de promedios simples de relativos, puede decirse que los precios se han elevado, en promedio, 32.5 por 100 y que las cantidades han aumentado, en promedio, 11.7 por 100 durante el periodo de tres años.

¿Qué puede decirse acerca de los índices simples promedios de relativos comparados con los índices agregados simples?

Cuadro 19.5. Cálculo de un índice simple de promedio de relativos de cantidades
(1972 = 100)

Bien i	1972 $\frac{q_{0i}}{q_{0i}}$	1973 $\frac{q_{1i}}{q_{0i}}$	1974 $\frac{q_{2i}}{q_{0i}}$
A	1.00	1.25	1.30
B	1.00	1.10	1.25
C	1.00	1.00	.80
Total	3.00	3.35	3.35
Número índice	100	111.7	111.7

Primero, puede decirse que el promedio simple de relativos de precios ha evitado una dificultad encontrada en el índice simple agregado de precios. Es decir, el primero ya no es influido por las unidades en que se cotizan los precios o por el nivel absoluto de los precios individuales. Los relativos son números puros y, por tanto, están divorciados de las unidades originales. En consecuencia, los números índices calculados por el método relativo serían iguales, cualquiera que sea la forma en que los precios son cotizados. Este promedio simple de relativos de precios se dice que satisface lo que se conoce como *prueba de unidades*. Igualmente, puede decirse que el método simple promedio de relativos puede usarse ahora para calcular un índice de cantidades para un agregado de bienes que no son cotizados en las mismas unidades.

A pesar de estos méritos, el promedio simple de relativos es todavía un método muy insatisfactorio, porque presenta una seria dificultad. Esta se relaciona con la elección de un promedio apropiado. El uso del promedio aritmético es considerado dudoso a veces porque tiene un sesgo hacia arriba. Comentaremos indirectamente esta cuestión en la sección 19.11. Mientras tanto, basta decir aquí que este aspecto de la dificultad no es muy grave. El aspecto grave es que se supone que los relativos tienen igual importancia. Este es de nuevo una clase de sistema de ponderación oculta altamente objetable, porque económicamente algunos relativos son más importantes que otros. Es interesante hacer constar que, en nuestro ejemplo, la cantidad relativa de C ejerce una influencia en el índice de cantidades de 1974 que posiblemente no guarda proporción con su importancia práctica. Esto es así, porque de las cantidades y unidades de A, B y C, podemos ver que C es el bien de importancia media del grupo; sin embargo, al relativo de cantidad asignamos el mismo peso que a A y B. Como consecuencia, los incrementos absolutos bastante grandes en las cantidades de A y B puede que hayan sido indebidamente compensados por reducción absoluta pequeña (pero relativa grande) de la cantidad de C.

Para concluir esta sección, debemos decir que la principal objeción a los índices simple agregado y simple promedio de relativos es a los pesos ocultos que generalmente están en conflicto con la realidad económica. Así, las mejoras de un índice se basan en la introducción de sistemas de ponderación apropiados para su construcción.

19.4 INDICES AGREGADOS PONDERADOS

En una sección posterior haremos un estudio detallado de la ponderación para un índice dado. Aquí, solamente diremos que los pesos más directamente usados para índices agregados de precios son cantidades de bienes por año base y que los pesos usuales para índices agregados de cantidades son precios de bienes por año base o por año dado.

El índice de precios agregados ponderados con cantidades de año base como pesos se llama *índice Laspeyres*, dado por la fórmula

$$P_b = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{ni}q_{0i}}{\sum_{i=1}^{k} p_{0i}q_{0i}}. \tag{19.5}$$

La aplicación de esta fórmula, como se indica en el cuadro 19.6, comprende los tres pasos siguientes:

Cuadro 19.6. Elaboración de un índice agregado de precios, usando pesos y cantidades del año base

	Valor de cantidades 1972 a precios de años dados		
	1972	1973	1974
Bien (i)	$p_{0i}q_{0i}$	$p_{1i}q_{0i}$	$p_{2i}q_{0i}$
A	(1)10 000 = 10 000	(1.25)10 000 = 12 500	(1.50)10 000 = 15 000
B	(10)1 000 = 10 000	(11.75)1 000 = 11 750	(13.50)1 000 = 13 500
C	(4)500 = 2 000	(5.00)500 = 2 500	(4.50)500 = 2 250
Total	22 000	26 750	30 750
Número índice	100.0	121.6	139.8

1. Multiplique el precio de cada bien en cada año por la cantidad de dicho bien en el año base para obtener $p_{0i}q_{0i}$ para el año base y $p_{ni}q_{0i}$ para cada año dado.
2. Obtenga las sumas de los productos calculadas en el paso 1.
3. Divida el total de cada año dado por el total del periodo base.

En el cuadro 19.6, el valor de 121.6 para el índice Laspeyres de 1973 puede interpretarse de este modo: "La lista de productos vendidos en 1972 rendiría 21.6 por 100 más a precios de venta de 1973 que lo que rindió realmente en 1972." En otras palabras, según este índice, los precios de venta se elevaron, en promedio, de 21.6 por 100 de 1972 a 1973. Si se usa la fórmula Laspeyres para calcular el índice de precios para el consumidor, el resultado mediría la diferencia entre el costo en un año dado y el costo en el año base de mantener el nivel de vida del año base. En general, el índice Laspeyres trata de contestar la pregunta: "¿Cuál es el cambio en el valor agregado de la lista de bienes del periodo base cuando son valuados a los precios del periodo base y del periodo dado?"

Cuadro 19.7. Elaboración de un índice agregado de precios, usando pesos y cantidades de años dados

	Valor de cantidades de años dados a precios de años dados			Valor de cantidades de años dados a precios de 1972		
	1972	1973	1974	1972	1973	1974
Bien (i)	$p_{0i}q_{0i}$	$p_{1i}q_{1i}$	$p_{2i}q_{2i}$	$p_{0i}q_{0i}$	$p_{0i}q_{1i}$	$p_{0i}q_{2i}$
A	10 000	15 625	19 500	10 000	12 500	13 000
B	10 000	12 925	16 875	10 000	11 000	12 500
C	2 000	2 500	1 800	2 000	2 000	1 600
Total	22 000	31 050	38 175	22 000	25 500	27 100
Número índice				100.0	121.8	140.9

El índice de precios agregado ponderado con cantidades del periodo dado como pesos se conoce a veces como *índice Paasche*. Se define por la fórmula

$$P_n = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{ni}q_{ni}}{\sum_{i=1}^{k} p_{0i}q_{ni}}. \tag{19.6}$$

El cálculo del índice Paasche se ilustra en el cuadro 19.7. El valor del índice de 140.9 para 1974 debe interpretarse ahora así: "La lista de productos vendidos en 1974 rindió 40.9 por 100 más que la misma lista de productos a precios de 1972." La fórmula Paasche, cuando se usa para calcular un índice de precios para el consumidor, compara el costo en el periodo dado con el costo en el periodo base de mantener el nivel de vida en el periodo dado. En general, esta fórmula contesta a la pregunta: "¿Cuál es el cambio en el valor agregado de la lista de bienes del periodo dado cuando son valuados a precios del periodo base y del periodo dado?"

Un índice de cantidades agregado ponderado es la contrapartida del índice de precios agregado análogo. Los pesos que han de ser usados son precios. Los índices de cantidades agregados de Laspeyres y Paasche se dan por las siguientes fórmulas:

$$Q_b = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{0i}q_{ni}}{\sum_{i=1}^{k} p_{0i}q_{0i}}; \tag{19.7}$$

$$Q_n = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{ni}q_{ni}}{\sum_{i=1}^{k} p_{ni}q_{0i}} \tag{19.8}$$

Obsérvese que todas las sumas de los productos para estas dos fórmulas ya han sido obtenidas en los cuadros 19.6 y 19.7. Así, refiriéndonos a estos cuadros, el índice de cantidad agregado para 1974, usando precios del año base como pesos y notación abreviada en la fórmula, es

$$Q_b = \frac{\sum p_0q_2}{\sum p_0q_0} = \frac{27\ 100}{22\ 000} = 1.232 \quad \text{ó } 123.2 \text{ por } 100.$$

El índice de cantidades, usando precios del periodo dado como pesos para 1974, es

$$Q_n = \frac{\sum p_2q_2}{\sum p_2q_0} = \frac{38\ 175}{30\ 750} = 1.241 \quad \text{ó } 124.1 \text{ por } 100.$$

El primer resultado significa que, a precios de 1972, el volumen de producción aumentó 23.2 por 100 entre 1972 y 1974. El segundo resultado significa que,

a precios de 1974, el volumen de producción aumentó 24.1 por 100 entre 1972 y 1974. Así, hablando en sentido general, un índice de cantidades agregado ponderado contesta la pregunta: "Si compramos (o vendemos) distintas cantidades de los mismos bienes en cada uno de los dos periodos, pero a los mismos precios, ¿cuánto se gastaría (o recibiría) en el periodo dado en relación con el periodo base?"

Puede hacerse ahora una interesante observación. Las fórmulas Paasche y Laspeyres empleadas para calcular el índice de precios o de cantidades generalmente dan diferentes resultados. Por supuesto, esto se debe a las diferencias en los pesos. Pero la diferencia no es fortuita. No tiene ningún sentido particular preguntar qué fórmula es precisa o mejor. Cada una de ellas es significativa en el sentido de que tiene una interpretación física simple y precisa. En una forma, podemos considerar realmente la diferencia como una escala de valores significativa. Si, por ejemplo, el índice de precios calculado por un método es 110 y por otro método es 130, podemos decir entonces que el nivel de precios ha cambiado de 100 a entre 110 y 130. Esta afirmación nos da una información útil, aunque no completamente precisa. Debe observarse que esta escala se reduce y, por tanto, adquiere mayor precisión, si las diferencias entre los pesos del año base y los pesos del año dado son menores. Durante un corto intervalo de tiempo, por ejemplo, de dos a cinco años, los pesos generalmente no cambian en grandes cantidades; como resultado, no importa mucho en teoría si se usa el índice Laspeyres o el Paasche. (Sin embargo, en la práctica hay mucha diferencia entre estas dos fórmulas. Por ejemplo, el uso de la fórmula Paasche para construir un índice de precios para el consumidor requiere una encuesta anual para determinar los pesos corrientes.)

19.5 INDICES DE PROMEDIOS PONDERADOS DE RELATIVOS

Los índices de promedios ponderados de relativos pueden calcularse de igual modo que se calcula el promedio simple de relativos, excepto que se introducen pesos apropiados. Los pesos usados aquí son valores en dólares de bienes en conjunto. Así, si se usan valores del año base como pesos, los pesos son $p_{0i}q_{0i}$. Si se emplean valores del año dado, los pesos $p_{ni}q_{ni}$. Si se usan valores teóricos como pesos, los pesos son $p_{ni}q_{0i}$ o $p_{0i}q_{ni}$. Se usan valores, en vez de cantidades o precios, para producir relativos ponderados que están en las mismas unidades. En la construcción de relativos de promedio ponderado de precios, por ejemplo, si las cantidades son empleadas como pesos, el producto de los relativos multiplicado por las cantidades cotizadas en diferentes unidades daría relativos de precios ponderados en unidades originales, y estos, por tanto, no podrían sumarse.

Como cualquier promedio ponderado, el promedio ponderado de relativos se calcula multiplicando cada relativo por su peso y dividiendo la suma de los productos por la suma de los pesos.

Los índices de promedio de relativos, de Laspeyres, son:

$$P_b = \frac{\sum_{i=1}^{k} (p_{0i}q_{0i})\left(\frac{p_{ni}}{p_{0i}}\right)}{\sum_{i=1}^{k} p_{0i}q_{0i}}; \quad (19.9)$$

$$Q_b = \frac{\sum_{i=1}^{k} (p_{0i}q_{0i})\left(\frac{q_{ni}}{q_{0i}}\right)}{\sum_{i=1}^{k} p_{0i}q_{0i}}; \quad (19.10)$$

Los índices de promedio de relativos, de Paasche, son:

$$P_n = \frac{\sum_{i=1}^{k} (p_{0i}q_{ni})\left(\frac{p_{ni}}{p_{0i}}\right)}{\sum_{i=1}^{k} p_{0i}q_{ni}}; \quad (19.11)$$

$$Q_n = \frac{\sum_{i=1}^{k} (p_{ni}q_{0i})\left(\frac{q_{ni}}{q_{0i}}\right)}{\sum_{i=1}^{k} p_{ni}q_{0i}}. \quad (19.12)$$

Debido a la eliminación en los numeradores de (19.9) a (19.12), son idénticos a índices agregados ponderados. Es decir (19.9) es lo mismo que (19.5), (19.10) es lo mismo que (19.7), (19.11) es lo mismo que (19.6), y (19.12) es lo mismo que (19.8).

Puesto que los procedimientos de construcción de los cuatro índices son similares, solo se ofrece aquí un ejemplo. En el cuadro 19.8 se obtiene un índice de precios usando la fórmula (19.9).

Deben observarse varias claras ventajas de los índices de promedio ponderado de relativos sobre los índices agregados ponderados:

1. Los relativos de precios o cantidades para cada bien del conjunto son, en realidad, un índice simple que a menudo da valiosa información para el análisis.

Cuadro 19.8. Cálculo de un índice promedio ponderado de relativos de precios con valores de año base como pesos

	Pesos	*Relativos de precios*		*Relativos ponderados de precios*	
	1972	1973	1974	1973	1974
Bien	$p_{0i}q_{0i}$	$\frac{p_{1i}}{p_{0i}}$	$\frac{p_{2i}}{p_{0i}}$	$p_{0i}q_{0i}\frac{p_{1i}}{p_{0i}}$	$p_{0i}q_{0i}\frac{p_{2i}}{p_{0i}}$
A	10 000	1.250	1.500	12 500	15 000
B	10 000	1.175	1.350	11 750	13 500
C	2 000	1.250	1.125	2 500	2 250
Total	22 000			26 750	30 750
Número índice	100.0			121.6	139.8

2. Cuando se introduce un nuevo bien para substituir a uno usado asteriormente, el relativo para el nuevo bien puede ser unido al relativo para el antiguo, usando los anteriores pesos de valores.
3. Cuando se calcula un índice escogiendo un bien de cada uno de los muchos subgrupos de bienes, los valores de cada subgrupo pueden ser usados como pesos. Entonces, solo es apropiado el método de promedio ponderado de relativos, y no se produce la eliminación indicada anteriormente en (19.9) a (19.12).
4. Cuando se obtienen diferentes números índices por el método de promedio de relativos, que tienen el mismo año base, pero que representan diferentes bienes, pueden combinarse para formar un nuevo índice.
5. Cuando han de construirse números índices con datos que no son análogos a los precios y las cantidades –razones de utilidades a capital contable, a mediana del ingreso, a costo de producción; o razones de bienes defectuosos a producción, para nombrar unos pocos–, pueden hacerse comparables expresándolos como porcentajes de cierta base.

19.6 INDICES DE VALORES: CONSISTENCIA ENTRE INDICES DE PRECIOS Y CANTIDADES

El valor de un solo bien es el producto de su precio y su cantidad –es decir, $v = pq$. Análogamente, el valor de un agregado de bienes es la suma de los valores individuales de los bienes –es decir, $\sum v = \sum pq$. El cambio en el valor de un agregado de valores se mide por un índice de valores, que se define como

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{ni}q_{ni}}{\sum_{i=1}^{k} p_{oi}q_{oi}} . \qquad (19.13)$$

En esta fórmula, precios y cantidades del periodo dado son variables en el numerador. No es necesario introducir pesos especiales; son inherentes a las cifras de valores.

El índice de valores no está en uso generalizado, pero, por la naturaleza insatisfactoria de los índices de precios y cantidades, se ha sugerido ocasionalmente que deben ser substituidos por el índice de valores. Esta tentación debe ser resistida, porque los conceptos de nivel de precios y nivel de cantidades contestan preguntas que no pueden ser contestadas por el nivel de valores. Además, un agregado de valores puede considerarse como el producto de un nivel de precios y un nivel de cantidades. La división de un agregado de valores en sus factores de precio y cantidad puede ser algo arbitraria, pero esta arbitrariedad no debe crear confusión mientras nuestros conceptos de los dos factores sean consistentes. La prueba de consistencia es que el producto de los índices de precios y cantidades debe producir el índice de valores. Esto depende de la ponderación apropiada para los dos índices. Siguiendo una versión abreviada de la notación usada anteriormente, tenemos dos valores reales en dólares: $\sum p_0q_0$ y $\sum p_nq_n$; y dos valores teóricos: $\sum p_nq_0$ y p_0q_n. Con estas cantidades, pueden obtenerse cuatro índices posibles:

$$P_b = \frac{\sum p_nq_0}{\sum p_0q_0} ;$$

$$P_n = \frac{\sum p_nq_n}{\sum p_0q_n} ;$$

$$Q_b = \frac{\sum p_0q_n}{\sum p_0q_0} ;$$

$$Q_n = \frac{\sum p_nq_n}{\sum p_nq_0} .$$

Puede verse fácilmente que P_b y Q_n son índices consistentes, porque

$$P_bQ_n = \left(\frac{\sum p_nq_0}{\sum p_0q_0}\right)\left(\frac{\sum p_nq_n}{\sum p_nq_0}\right) = \frac{\sum p_nq_n}{\sum p_0q_0} = V.$$

El índice de valores mide el cambio en los valores reales entre los periodos base y dado. Análogamente, P_n y Q_b son medidas consistentes. Sin embargo, P_b y Q_b, o P_n y Q_n, no son consistentes. Así, puede obtenerse una regla de estas demostraciones: Si el índice de precios es elaborado con pesos cantidades del periodo base, el índice de cantidades debe ser elaborado con pesos precios del periodo dado, y viceversa, para hacer que los niveles de precios y cantidades sean consistentes.

19.7 INDICES DE PRODUCTIVIDAD

Productividad significa eficiencia en la producción. Se mide por la razón de producción a insumos. Si se eleva esta razón –es decir, son producidas más unidades de producción con las mismas unidades de insumos–, aumenta la productividad. La medición de los cambios en la producción es una tarea relativamente sencilla. Si solo hay un producto, los cambios en la producción son simplemente los cambios en el número de unidades producidas. Si se considera un agregado de productos, los cambios en los productos pueden ser medidos fácilmente por un "índice de producción". Pero la medición de los cambios en los insumos presenta problemas muy complicados: los insumos son de gran variedad –diferentes clases de mano de obra, varios tipos de materias primas, inversiones en máquinas y equipo, pericia de la gerencia, etc. Posiblemente, podría obtenerse un índice de alguna clase para medir los cambios en los factores agregados de producción, pero la ponderación apropiada de tal índice es extraordinariamente difícil, y aun físicamente imposible en algunos casos. Por ello, en la práctica suele obtenerse un índice de productividad sobre la base de un solo insumo que se juzga como el factor más importante. El insumo escogido es mano de obra, porque, en promedio, la cuenta de salarios representa aproximadamente dos tercios de los costos totales de producción en muchos tipos de operaciones. Además, los datos de mano de obra son más fácilmente obtenibles y las unidades de mano de obra –generalmente horas-hombre– pueden definirse e interpretarse más precisamente que otras clases de datos de insumos.

Cuadro 19.9. Elaboración de un índice de productividad usando cantidades de año base como pesos

	Unidades producidas en el año base	Horas-hombre por unidad		Horas-hombre requeridas para producir cantidad de año base	
		1972	1974	1972	1974
Bienes (i)	q_{0i}	r_{0i}	r_{ni}	$r_{0i}q_{0i}$	$r_{ni}q_{0i}$
A	10 000	$1/2$	$2/5$	5 000	4 000
B	1 000	5	$9/2$	5 000	4 500
C	500	$3/2$	$3/2$	750	750
Total				10 750	9 250
Número índice				100	86

La productividad de la mano de obra se define como horas-hombre por unidad de producción o como unidades de producción por horas-hombre. Puede obtenerse un índice de productividad usando una u otra noción. La obtención de un índice de productividad, usando horas-hombre por unidad de producción y cantidades de año base como pesos, se ilustra en el cuadro 19.9. La fórmula usada es

$$E_b = \frac{\sum_{i=1}^{k} r_{ni}q_{0i}}{\sum_{i=1}^{k} r_{0i}q_{0i}}, \tag{19.14}$$

donde r_{0i} y r_{ni} representan horas-hombre por unidad de producción en los periodos base y dado, respectivamente.

Este índice, suponiendo que la producción permanece constante, mide los cambios en horas-hombre por unidad de producción. Así, el resultado en nuestro ejemplo significa que las horas-hombre por unidad de producción han disminuido 14 por 100 entre los dos periodos.

Es interesante observar que la razón de insumo a producción es el recíproco de la razón de producción a insumo:

$$\frac{\text{insumo}}{\text{producción}} = \frac{1}{\text{producción/insumo}}.$$

Por tanto, se deduce que el resultado de tomar el recíproco del índice calculado anteriormente –es decir, $1/0.86 \doteq 1.16$, ó 116 por 100– es un índice que mide el cambio en la producción por hora-hombre.

Lo que debe observarse también es que el índice de mano de obra por unidad de producción, o de producción por unidad de mano de obra, no debe considerarse como meramente un índice de productividad de la mano de obra: La eficiencia de la mano de obra también depende de la calidad de la inversión y de la gerencia. En otras palabras, los cambios en la mano de obra requeridos para producir una cantidad dada de producción son a menudo los efectos conjuntos de todos los factores de la producción.

19.8 TOPICOS ESPECIALES

En esta sección introduciremos tres tópicos especiales de considerable interés acerca de los números índices. Son: cambio de la base de un índice, procedimientos de enlace en cadena, y unión de dos números índices traslapantes.

Desplazamiento de la base de un índice

A veces, deseamos desplazar la base de un índice para hacerla más reciente o para obtener dos índices con diferentes bases comparables. Desplazar la base de un índice es muy sencillo. Por ejemplo, si se obtiene un número índice con 1968 = 100, como se indica por el índice A de abajo, y deseamos cambiar la base a 1969, simplemente dividimos todos los números índices de la serie A por el índice de 1969 de dicha serie para producir el índice B. Análogamente, para desplazar la base de 1969 a 1970, dividimos todos los números índices de B por el de 1970 de B. Estos resultados son:

Años	A 1968 = 100	B 1969 = 100	C 1970 = 100
1968	100	80	50.0
1969	125	100	62.5
1970	200	160	100.0

Una ojeada a la serie anterior muestra que, en cada caso, las razones de números índices son idénticas:

$$1.00 : 1.25 : 2.00$$

Procedimientos de enlace en cadena

Artículos antiguos pueden ser retirados continuamente del mercado y otros nuevos pueden ser introducidos en él. Por consiguiente, es conveniente revisar de tiempo en tiempo la lista de artículos y los sistemas de ponderación de números índices. Para este objeto, empleamos lo que se llama procedimiento de *enlace*, en el que se obtienen números índices de enlace con el periodo anterior como base de comparación.

La obtención de números índices de enlace es muy sencilla. Supongamos que tenemos una serie de cuatro años con los siguientes valores:

$$1967 = a = 10,$$
$$1968 = b = 15,$$
$$1969 = c = 25,$$
$$1970 = d = 30;$$

y supongamos que nos interesa una serie de cambios de a a b, de b a c, y de c a d; podemos obtener entonces los siguientes relativos de enlace: